ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-643-647

УДК 517

О ПРОДОЛЖАЕМОСТИ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

© **С. Е. Жуковский, Л.-Э. И. Нгомиракиза**

Российский университет дружбы народов

117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. М.-Маклая, 6

E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru, nglain@yandex.com

Аннотация. В работе исследуются локально инъективные накрывающие отображения метрических пространств. Показано, что эти отображения обладают свойством продолжаемости для непрерывных функций.

Ключевые слова: накрывающие отображения; метрические пространства; продолжаемость; локальная инъективность

Прежде чем перейти к постановке задачи напомним, некоторые определения. Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) – метрические пространства. Обозначим через $B_X(x, r)$ замкнутый шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r \geq 0$, то есть $B_X(x, r) = \{u \in X : \rho_X(x, u) \leq r\}$.

Пусть задано $\alpha > 0$. Отображение $\psi : X \to Y$ называется α-накрывающим, если

$$\forall\, x_0 \in X, \quad \forall\, y \in Y \quad \exists\, x \in X : \quad \psi(x) = y, \quad \rho_X(x_0, x) \leq \frac{1}{\alpha}\rho_Y(\psi(x_0), y).$$

Накрывающие отображения метрических пространств используются при изучении нелинейных уравнений и включений (см., например, [1, 2]). В этой статье мы исследуем свойства локальной инъективных накрывающих отображений. Отображение $\psi : X \to Y$ называется локально инъективным, если для каждой точки $x_0 \in X$ существует $r > 0$ такое, что сужение ψ на $B_X(x_0, r)$ инъективно, то есть

$$\forall\, x_1, x_2 \in B_X(x_0, r) \quad \psi(x_1) = \psi(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$

При исследовании вопросов существования и единственности решений нелинейных уравнений важную роль играет понятие продолжаемости отображений (см., например, §5.3. в [3]). Говорят, что отображение $\psi : X \to Y$ обладает свойством продолжаемости для заданного непрерывного отображения $v : [0, 1] \to Y$, если для каждого $T \in (0, 1]$, для каждого непрерывного отображения $u : [0, T) \to X$ такого, что $\psi(u(t)) = v(t)$ для любого $t \in [0, T]$, существует $\lim\limits_{t \to T-0} u(t) =: u(T)$ и $\psi(u(T)) = v(T)$.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01168).

Цель настоящей работы состоит в доказательстве свойства продолжаемости накрывающих локально инъективных отображений $\psi : X \to Y$ для липшицевых отображений $v : [0,1] \to Y$. Соответствующий основной результат статьи сформулирован ниже в теореме 1. Прежде чем перейти к ней, приведем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Пусть ψ является непрерывным и α-накрывающим, для некоторых $x_0 \in X$ и $r > 0$ сужение ψ на $B_X(x_0, r)$ инъективно, отображение $\varphi : \psi(B_X(x_0, r)) \to B_X(x_0, r)$ является обратным к ψ на $B_X(x_0, r)$, то есть*

$$\psi(\varphi(y)) = y \quad \forall\, y \in \psi(B_X(x_0, r)), \quad \varphi(\psi(x)) = x \quad \forall\, x \in B_X(x_0, r). \tag{1}$$

Тогда $B_Y(\psi(x_0), \alpha r/3) \subset \psi(B_X(x_0, r))$ и

$$\rho_X(\varphi(y_1), \varphi(y_2)) \le \alpha^{-1} \rho_Y(y_1, y_2) \quad \forall\, y_1, y_2 \in B_Y(\psi(x_0), \alpha r/3). \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из α-накрываемости отображения ψ следует, что

$$B_Y(\psi(x_0), \alpha r/3) \subset \psi(B_X(x_0, r)).$$

Докажем соотношение (2).

Возьмем произвольные точки $y_1, y_2 \in B_Y(\psi(x_0), \alpha r/3)$. В силу α-накрываемости отображения ψ существует точка $x_1 \in X$ такая, что

$$\psi(x_1) = y_1 \quad \text{и} \quad \rho(x_0, x_1) \le \frac{r}{3}.$$

Отсюда из инъективности отображения ψ на шаре $B_X(x_0, r)$ следует, что $x_1 = \varphi(y_1)$. В силу α-накрываемости отображения ψ существует точка $x_2 \in X$ такая, что

$$\psi(x_2) = y_2 \quad \text{и} \quad \rho_X(x_1, x_2) \le \frac{\rho_Y(y_1, y_2)}{\alpha}. \tag{3}$$

Поскольку

$$\rho_Y(y_1, y_2) \le \rho_Y(y_1, \psi(x_0)) + \rho_Y(\psi(x_0), y_2) \le \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = \frac{2r}{3},$$

то из неравенства в (3) следует, что

$$\rho_X(x_0, x_2) \le \rho_X(x_0, x_1) + \rho_X(x_1, x_2) \le r.$$

В силу инъективности ψ на $B_X(x_0, r)$ имеем $x_2 = \varphi(y_2)$. Поэтому неравенство в (3) вытекает из соотношения (2). $\square$

Лемма 2. *Пусть отображение ψ является непрерывным, α-накрывающим и локально инъективным, отображение $v : [0,1] \to Y$ является липшицевым с константой $l \ge 0$, для непрерывного отображения $u : [0, T) \to X$ имеет место тождество $\psi(u(t)) \equiv v(t)$. Тогда отображение u является $\alpha^{-1} l$-липшицевым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. **I.** Возьмем произвольную точку $t_0 \in [0,T)$. Покажем, что отображение u является $\alpha^{-1}l$-липшицевым в некоторой окрестности точки t_0.

Положим $x_0 := u(t_0)$. Поскольку отображение ψ является локально инъективным, то существует $r > 0$ такой, что сужение ψ на $B_X(u_0, r)$ инъективно. Пусть $\varphi : \psi(B_X(x_0, r)) \to B_X(x_0, r)$ – обратное отображение к отображению ψ на $B_X(x_0, r)$, то есть имеет место соотношение (1).

Из непрерывности отображений u и v следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$u(t) \in B_X(x_0, r), \quad v(t) \in B_Y(\psi(x_0), \alpha r/3) \quad \forall\, t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \cap [0,T).$$

Отсюда поскольку по предположению при каждом $t \in [0,T)$ имеет место равенство $\psi(u(t)) = v(t)$, а $B_Y(\psi(x_0), \alpha r/3) \subset \psi(B_X(x_0, r))$ в силу леммы 1, то $u(t) = \varphi(v(t))$ при $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \cap [0,T)$. Значит, отображение u является $\alpha^{-1}l$-липшицевым на $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \cap [0,T)$, так как φ является α^{-1}-липшицевым в силу леммы 1, а v является l-липшицевым по предположению.

II. Докажем, что отображение u является $\alpha^{-1}l$-липшицевым. Предположим противное, то есть существуют $t_1, t_2 \in [0,T)$, $t_1 < t_2$ такие, что $\rho_X(u(t_1), u(t_2)) > \alpha^{-1}l(t_2 - t_1)$. Положим

$$\gamma(t) := \rho_X(u(t_1), u(t)) - \alpha^{-1}l(t - t_1), \quad t \in [0,T).$$

В силу непрерывности отображения γ и соотношений $\gamma(t_1) = 0$, $\gamma(t_2) > 0$ существует точка $\tau \in [t_1, t_2)$ такая, что $\gamma(\tau) = 0$ и $\gamma(t) > 0$ при любом $t \in [\tau, t_2)$. В силу **I** отображение u липшицево в некоторой окрестности точки τ. Поэтому существует $t' \in (\tau, t_2)$ такое, что $\rho_X(u(t'), u(\tau)) \le \alpha^{-1}l(t' - \tau)$. Значит,

$$\gamma(t') = \rho_X(u(t_1), u(t')) - \alpha^{-1}l(t' - t_1) \le$$

$$\le \rho_X(u(t_1), u(\tau)) + \rho_X(u(\tau), u(t')) - \alpha^{-1}l(t' - \tau) - \alpha^{-1}l(\tau - t_1) \le \gamma(\tau) \le 0,$$

что противоречит неравенству $\gamma(t') > 0$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Теорема 1. *Пусть отображение $\psi : X \to Y$ является α-накрывающим, непрерывным и локально инъективным, отображение $v : [0,1] \to Y$ является l-липшицевым, пространство (X, ρ_X) – полным. Тогда отображение ψ обладает свойством продолжаемости для v.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное $T \in (0,1]$ и произвольное непрерывное отображение $u : [0,T) \to X$ такое, что $\psi(u(t)) = v(t)$ для любого $t \in [0,T)$. В силу леммы 2 отображение u является $\alpha^{-1}l$-липшицевым. Возьмем произвольную последовательность $\{t_j\} \subset [0,T)$, сходящуюся к T слева. Имеем

$$\rho_X(u(t_i), u(t_j)) \le \alpha^{-1}l|t_i - t_j| \quad \forall\, i, j.$$

Поэтому последовательность $\{u(t_j)\}$ фундаментальна. Следовательно, в силу полноты пространства (X, ρ_X) она сходится к некоторой точке $\bar{x} \in X$. Очевидно, для любой последовательности $\{\tau_j\} \subset [0,T)$, сходящейся к T слева, последовательность $\{u(\tau_j)\}$

сходится к $\bar{x}$, иначе последовательность $u(t_1), u(\tau_1), u(t_2), u(\tau_2), \ldots$ расходится, что, как показано выше, невозможно. Таким образом, $\bar{x} = \lim\limits_{t \to T-0} u(t)$. $\square$

Повторяя рассуждения, приведенные в §5.3.2 в [3], из леммы 2 и теоремы 1 можно вывести следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть отображение* $\psi : X \to Y$ *является* α*-накрывающим, непрерывным и локально инъективным, отображение* $v : [0,1] \to Y$ *является* l*-липшицевым,* $u_0 \in X$, $\psi(u_0) = v(0)$, *пространство* (X, ρ_X) *полно.*

Тогда существует единственная непрерывная функция $u : [0,1] \to X$ *такая, что* $\psi(u(t)) \equiv v(t)$ *и* $u(0) = u_0$. *Более того, эта функция* u *является* $\alpha^{-1}l$*-липшицевой.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151-155.

2. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // Journal of Fixed Points Theory and Applications. 2009. Vol. 5. № 1. P. 106-127.

3. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 559 с.

Поступила в редакцию 20 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 22 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Жуковский Сергей Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Нгомиракиза Ларри-Элвис Инносентович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант, кафедра нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: nglain@yandex.com

Для цитирования: *Жуковский С.Е., Нгомиракиза Л.-Э.И.* О продолжаемости в метрических пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 643–647. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-643-647

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-643-647

ON CONTINUATION IN METRIC SPACES

S. E. Zhukovskiy, L.-E. I. Ngomirakiza

RUDN University
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru, nglain@yandex.com

Abstract. We study locally injective covering mappings between metric spaces. We show that under natural assumptions these mappings have continuation property.
Keywords: covering mappings; metric spaces; continuation; local injectivity

REFERENCES

1. Arutyunov A.V. Covering mappings in metric spaces and fixed points. *Doklady Mathematics*, 2007, vol. 76, no. 2, pp. 665-668.

2. Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points. *Journal of Fixed Points Theory and Applications*, 2009, vol. 5, no. 1, pp. 106-127.

3. Ortega J., Rheinboldt W. *Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables.* New York, Academic Press, 1970, 690 p.

Received 20 April 2018
Reviewed 22 May 2018
Accepted for press 26 June 2018
There is no conflict of interests.

Zhukovskiy Sergey Evgenyevich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Ngomirakiza Larry-Elvis Innosentovich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: nglain@yandex.com

For citation: Zhukovskiy S.E., Ngomirakiza L.-E.I., O prodolzhaemosti v metricheskih prostranstvah [On Continuation in Metric Spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 643–647. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-643-647 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work was supported by the Russian Science Foundation (Project № 17-11-01168).